Solution 4 :

*

- $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 2$ ou $n \equiv 1 \pmod 2$
- $n \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \equiv 1 \pmod 2 \\ 7n+1 \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 2$
- $n \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 7n+1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 2$

conclusion : pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 2$

*

- $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n \equiv 1 \pmod 3$ ou $n \equiv (2) \pmod 3$
- $n \equiv 0\ (1) \Leftrightarrow n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 3$
- $n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2n+1 \equiv 0 \pmod 3$

  d'où $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 3$
- $n \equiv 2\ (3) \Rightarrow 7n \equiv 14 \pmod 3 \Rightarrow 7n+1 \equiv 0 \pmod 3$

  $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 3$

on a : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 3$

ainsi on peut écrire : $\begin{cases} n(2n+1)(7n+1) \in M_2 \\ n(2n+1)(7n+1) \in M_3 \end{cases}$

$M_2 \cap M_3 = M_{(2 \vee 3)} = M_6$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \pmod 6$

Solution 5 :

1°/ δ = P.G.C.D (a,b) $\Rightarrow$ δ divise $a = 2n+8$ et $b = 3n+5$

$\Rightarrow$ δ divise $2b - 3a$ c.a.d δ divise 6

2°/ PGCD (2n+8 , 3n+15) = 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+8 = 6p \\ 3n+15 = 6q \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3p-4 \\ n = 2q-5 \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$